4ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

1. Να βρεθούν τα όρια των ακολουθιών

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{M^n}{n!} \quad (\text{όπου} \quad M \in \mathbb{R}) \qquad \beta_n = \frac{5^n + n!}{11^n + 2n!} \\
\gamma_n &= \sqrt[n]{n!} \quad (\text{Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τον ορισμό}) \qquad \delta_n = (1 + \frac{1}{n!})^{3n!}
\end{aligned}
$$

2. Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία θετικών αριθμών με $a_n \to \ell$ όπου $\ell > 0$. Να δειχθεί ότι $\sqrt[n]{a_n} \to 1$. Να δείξετε (χρησιμοποιώντας κατάλληλα αντιπαραδείγματα) ότι όταν $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία θετικών αριθμών με $a_n \to 0$ ενδέχεται να ισχύει $\sqrt[n]{a_n} \to x$ για οποιοδήποτε x με $0 \leq x \leq 1$ ενώ επίσης ενδέχεται η ακολουθία $(\sqrt[n]{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ να μην είναι συγκλίνουσα.

3. Αν $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία και $x \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι $a_n \to x$ αν και μόνο αν $a_{2n} \to x$ και $a_{2n-1} \to x$.

4. Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία πραγματικών αριθμών ώστε οι υπακολουθίες της $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ και $(a_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ να είναι συγκλίνουσες. Να δειχθεί ότι η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα. [Υπόδειξη: Βρείτε κοινή υπακολουθία των $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ και $(a_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ και κοινή υπακολουθία των $(a_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ και $(a_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$. Στη συνέχεια χρησιμοποιήστε την προηγούμενη άσκηση.]

5. Δίνεται η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $a_1 = 1$ και $a_{n+1} = 5 + \sqrt{a_n + 7}$. Να δείξετε ότι η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα και να βρεθεί το όριό της.

6. Δίνεται η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $a_1 = 1$ και $a_{n+1} = \frac{4+3a_n}{3+2a_n}$. Να δείξετε ότι η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα και να βρεθεί το όριό της. [Υπόδειξη: Μετασχηματίστε τον τύπο ώστε να εμφανίζεται το a_n μόνο μια φορά και να είναι πιο εύκολη η διαχείριση της ακολουθίας.]

7. Δίνεται η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $x_1 = 1$ και $x_{n+1} = \frac{2+x_n}{1+x_n}$. α) Δείξτε ότι $1 \leq x_n \leq 2, \forall n \in \mathbb{N}$. β) Δείξτε ότι η $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα, η $(x_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα, ενώ η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν μονότονη (ούτε τελικά μονότονη). γ) Δείξτε ότι η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα και βρείτε το όριό της.

8. Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία πραγματικών και $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία θετικών αριθμών ώστε να ισχύει $\varepsilon_n \to 0$ και $|a_{n+k} - a_n| < \varepsilon_n$ για κάθε $n, k \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα. [Υπόδειξη: Δείξτε ότι η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Cauchy.]